Cuprins

1. Mulțimi. Submulțimi. Operații cu mulțimi

1.1. Noțiunea de mulțime

Noțiunea de mulțime face parte din categoria noțiunilor primare, care nu se definesc ci doar se descriu. Totuși prin mulțime putem înțelege o colecție de obiecte grupate pe baza anumitor proprietăți comune. De asemenea, și noțiunea de apartenență (relația de a fi element al unei mulțimi) este o noțiune primară.

Mulțimile se notează cu litere mari sau cu litere speciale în cazul unor mulțimi consacrate.

Exemple:

- Mulțimea culorilor curcubeului; mulțimea creioanelor colorate din penar; mulțimea animalelor din curtea bunicii.
- Mulțimi de litere: mulțimea literelor care alcătuiesc cuvântul matematică
$$A = \{\text{m, a, t, e, i, c, ă}\}.$$
- Mulțimi de numere: mulțimea cifrelor: $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; mulțimea numerelor naturale de la 0 la 100: $C = \{0,1,2, \dots ,100\}$; mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$.

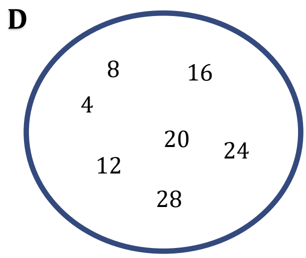
Spunem că un element aparține unui mulțimi dacă se află printre elementele mulțimii.

Exemple:

- Roșu este o culoare a curcubeului; creionul galben se află în penar; găina este un animal din curtea bunicii.
- $m \in A$, mulțimea literelor care alcătuiesc cuvântul matematică conține litera m.
- $5 \in B$, 5 este cifră.
- $52 \in \mathbb{N}$.
- $2022 \notin C$. Elementul 2022 nu aparține mulțimii numerelor naturale de la 0 la 100.

Mulțimile pot fi reprezentate în trei moduri

- Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler;
- Prin enumerarea elementelor mulțimii;
- Cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor sale.



Exemplu:

Diagrama Venn-Euler

Enumerarea elementelor

$D = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$.

Folosind proprietatea caracteristică

$D = \{x = 4k | k \leq 7, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Definiție: Numim ***cardinalul*** unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Notăm cardinalul mulțimii A cu $card\ A$ sau $|A|$.

Exemplu:

În exemplul anterior cardinalul mulțimii D este $card\ D = 7$.

Definiție: Mulțimile care nu sunt finite se numesc infinite.

Definiție: Mulțimea fără nici un element poartă numele de ***mulțimea vidă*** și se notează cu $\emptyset$. Mulțimea vidă are cardinalul nul. ($card\ \emptyset = 0$)

Definiție: Două mulțimi se numesc ***echipotente*** dacă au cardinalele egale. Se notează $A \sim B$.

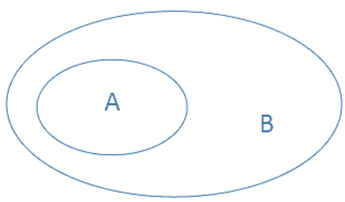
Exemplu:

Mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 5\}$ și $B = \{0,1,2,3,4\}$ sunt echipotente, deoarece a cardinalul egal cu 5.

1.2. Relații între mulțimi

Există două tipuri de relații între mulțimi: egalitatea și incluziunea.

Definiție: Spunem că mulțimea A este ***inclusă*** în mulțimea B și notăm $A \subseteq B$, dacă orice element din mulțimea A este element al mulțimii B. În acest caz, spunem că A este submulțime a lui B.



$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in B.$$

Exemplu:

Mulțimea $A = \{2, 4, 6\}$ este inclusă în mulțimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Scriem $A \subseteq B$ sau

$$\{2, 4, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Proprietățile relației de incluziune

1. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi $\emptyset \subseteq A, \forall\, A$.
2. Reflexivitate: orice mulțime este submulțime a sa $A \subseteq A, \forall A$.
3. Tranzitivitate: dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$.

Definiție: Spunem că mulțimea A este ***egală*** cu mulțimea B dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Altfel spus, două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elementele.

Exemplu:

Mulțimile $A = \{x = 3k + 1 | k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$ și $B = \{y = 3p - 2 |\, p \in \mathbb{N}^*, p \leq 5\}$ sunt egale, deoarece $A = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ și $B = \{1, 4, 7, 10, 13\}$.

Proprietățile relației de egalitate:

1. Reflexivitate: $A = A, \forall A$.
2. Simetrie: dacă $A = B$, atunci $B = A$.
3. Tranzitivitate: dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.

Definiție: Mulțimea submulțimilor lui A se numește ***mulțimea părților lui A*** și se notează cu $\mathcal{P}(A)$.

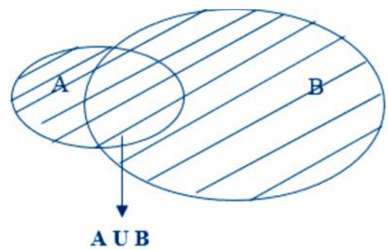
Exemplu:

Dacă $A = 0,1,2$, atunci $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

1.3. Operații cu mulțimi

Definiție: ***Reuniunea*** a două mulțimi este mulțimea formată din toate elementele celor două mulțimi scrise o singură dată. Notăm reuniunea dintre mulțimile A și B cu $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A\ și\ x \in B\}.$$

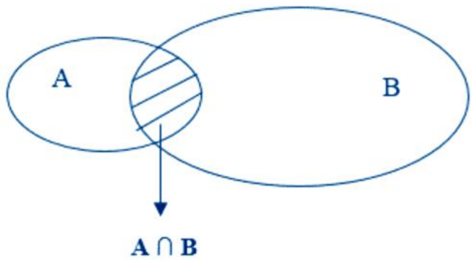


Exemplu:

Dacă $A = \{1,2,4,6,7\}$ și $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$, atunci $A \cup B = \{0,1,2,4,6,7,8,9,10\}$.

Definiție: ***Intersecția*** a două mulțimi este mulțimea elementelor comune. Notăm intersecția dintre mulțimile A și B cu $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x | x \in A\ sau\ x \in B\}.$$



Exemplu:

Dacă $A = \{1,2,4,6,7\}$ și $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$, atunci $A \cap B = \{1,4,6\}$.

Definiție: Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc mulțimi ***disjuncte.***

Exemplu:

Mulțimile $A = \{1,5,7\}$ și $B = \{0,4,8\}$ sunt disjuncte.

Propoziția 1.1: *Fie mulțimile A, B și C. Atunci au loc relațiile:*

i. $A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B;$

ii. $A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B;$

iii. $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup \emptyset = A;$

iv. *Reflexivitatea:* $A \cap A = A; A \cup A = A;$

v. *Comutativitatea:* $A \cup B = B \cup A;\ A \cap B = B \cap A;$

vi. *Asociativitatea:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$

vii. *Distributivitatea*

a. *Reuniunii față de intersecție:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

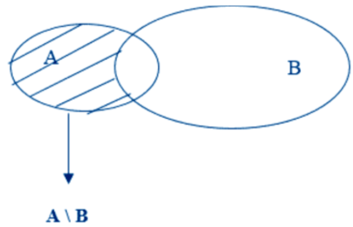
b. *Intersecției față de reuniune:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

Definiție: Mulțimea tuturor submulțimilor disjuncte ale unei mulțimi A se numește ***partiție*** a mulțimii A.

Definiție: ***Diferența*** a două mulțimi este mulțimea formată din elementele care se află în prima mulțime, dar nu se află în a doua. Notăm diferența dintre mulțimile A și B cu $A - B$ sau $A \setminus B$.

$$A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$



Exemplu:

Dacă $A = \{1,2,4,6,7\}$ și $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$, atunci $A - B = \{2,7\}$ și $B - A = \{0,8,9,10\}$.

Observăm că $A - B \neq B - A$.

Propoziția 1.2: *Fie mulțimile A, B și C. Atunci au loc relațiile:*

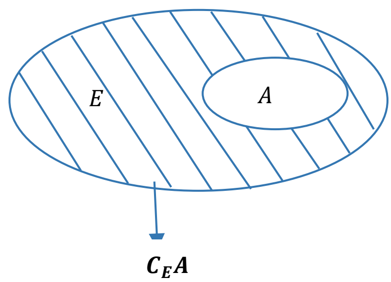
i. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;

ii. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

iii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$; $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Definiție: Pentru $A \subseteq E$, numim ***complementara*** mulțimii A mulțimea $E - A$, notată cu $C_E A$.

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\} = E - A.$$



Propoziția 1.3: *Fie $A, B \subseteq E$. Atunci au loc relațiile:*

i. $A \cup C_E A = E$;

ii. $A \cap C_E A = \emptyset$;

iii. *Relațiile lui De Morgan*

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B);$$
$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B);$$

Definiție: Pentru mulțimile A și B, definim ***diferența simetrică***

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$