

## Cuprins

<b>1</b>	<b>Mulțimi. Submulțimi. Operații cu mulțimi .....</b>	<b>11</b>
1.1	Noțiunea de mulțime .....	11
1.2	Relații între mulțimi.....	12
1.3	Operații cu mulțimi .....	13
1.4	Principiul includerii și al excluderii.....	16
1.5	Exerciții propuse.....	17
<b>2</b>	<b>Relații binare .....</b>	<b>20</b>
2.1	Definiție și exemple.....	20
2.2	Operații cu relații binare .....	21
2.3	Relații de ordine.....	22
2.4	Relații de echivalență .....	25
2.5	Exerciții propuse.....	26
<b>3</b>	<b>Legi de compoziție. Structuri algebrice.....</b>	<b>28</b>
3.1	Legi de compoziție .....	28
3.2	Structuri algebrice.....	31
3.3	Reguli de calcul în grup.....	34
3.4	Exerciții propuse.....	35
<b>4</b>	<b>Mulțimea numerelor naturale.....</b>	<b>37</b>
4.1	Axiomatica lui Peano .....	37
4.2	Relația de ordine pe $\mathbb{N}$ .....	38
4.3	Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{N}$ .....	40
4.4	Sisteme de numerație.....	41
4.5	Exerciții propuse.....	43
<b>5</b>	<b>Divizibilitate în mulțimea numerelor naturale.....</b>	<b>50</b>
5.1	Crierii de divizibilitate.....	53
5.1	Numere prime. Numere ireductibile.....	56
5.2	Teorema fundamentală a aritmeticii.....	57
5.3	Exerciții propuse.....	58

<b>6 Mulțimea numerelor întregi .....</b>	<b>62</b>
6.1 Modulul numărului întreg.....	63
6.2 Operații pe $\mathbb{Z}$ .....	63
6.3 Relația de ordine pe $\mathbb{Z}$ .....	66
6.4 Teorema împărțirii cu rest pe $\mathbb{Z}$ .....	66
6.5 Exerciții propuse.....	68
<b>7 Mulțimea numerelor raționale.....</b>	<b>72</b>
7.1 Operații pe mulțimea numerelor raționale .....	73
7.2 Relația de ordine pe $\mathbb{Q}$ .....	74
7.3 Partea întreagă și partea fracționară .....	78
7.4 Exerciții propuse.....	78
<b>8 Rapoarte și proporții. Mărimi direct și invers proporționale.....</b>	<b>85</b>
8.1 Rapoarte și proporții .....	85
8.2 Aplicații ale rapoartelor.....	86
8.3 Proporții derivate .....	89
8.4 Șiruri de rapoarte egale .....	89
8.5 Mărimi direct proporționale.....	90
8.6 Mărimi invers proporționale.....	91
8.7 Regula de trei simplă. ....	91
8.8 Regula de trei compusă.....	92
8.9 Exerciții propuse.....	93
<b>9 Mulțimea numerelor reale.....</b>	<b>99</b>
9.1 Rădăcina pătrată a unui număr natural .....	99
9.2 Mulțimea numerelor reale .....	103
9.3 Operații cu numere reale.....	106
9.4 Media aritmetică și media geometrică.....	109
9.5 Exerciții propuse.....	110
<b>10 Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații .....</b>	<b>115</b>
10.2 Inecuații.....	118
10.3 Ecuații liniare cu două necunoscute.....	121
10.4 Sisteme de ecuații .....	122
10.5 Metode de rezolvare a ecuațiilor liniare cu două necunoscute .....	123
10.6 Exerciții propuse.....	126

---

<b>11 Metode aritmetice de rezolvare a problemelor .....</b>	<b>132</b>
11.1 Metoda reducerii la unitate.....	134
11.2 Metoda comparației .....	135
11.3 Metoda figurativă sau metoda grafică .....	137
11.4 Metoda falsei ipoteze.....	140
11.5 Metoda mersului invers .....	141
11.6 Alte metode de rezolvare a problemelor de matematică .....	144
11.7 Exerciții propuse.....	146
<b>12 Elemente de organizare a datelor .....</b>	<b>150</b>
12.1 Modalități de reprezentare a datelor .....	151
12.2 Probabilități .....	154
12.3 Reprezentarea punctelor cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. .	156
12.4 Exerciții propuse.....	158
<b>13 Unități de măsură.....</b>	<b>162</b>
13.1 Unități de măsură pentru lungime.....	164
13.2 Unități de măsură pentru arie.....	165
13.3 Unități de măsură pentru volum .....	166
13.4 Unități de măsură pentru capacitate .....	167
13.5 Unități de măsură pentru masă .....	168
13.6 Unități de măsură pentru timp .....	169
13.7 Exerciții propuse.....	170
<b>14 Modele de teste de evaluare .....</b>	<b>174</b>
<b>Indicații și răspunsuri .....</b>	<b>181</b>
<b>Bibliografie.....</b>	<b>195</b>

# 1. Mulțimi. Submulțimi. Operații cu mulțimi

## 1.1. Noțiunea de mulțime

Noțiunea de mulțime face parte din categoria noțiunilor primare, care nu se definesc ci doar se descriu. Totuși prin mulțime putem înțelege o colecție de obiecte grupate pe baza anumitor proprietăți comune. De asemenea, și noțiunea de apartenență (relația de a fi element al unei mulțimi) este o noțiune primară.

Mulțimile se notează cu litere mari sau cu litere speciale în cazul unor mulțimi consacrate.

*Exemple:*

- Mulțimea culorilor curcubeului; mulțimea creioanelor colorate din penar; mulțimea animalelor din curtea bunicii.
- Mulțimi de litere: mulțimea literelor care alcătuiesc cuvântul matematică  
$$A = \{m, a, t, e, i, c, \ddot{a}\}.$$
- Mulțimi de numere: mulțimea cifrelor:  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ; mulțimea numerelor naturale de la 0 la 100:  $C = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$ ; mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$ .

Spunem că un element aparține unui mulțimi dacă se află printre elementele mulțimii.

*Exemple:*

- Roșu este o culoare a curcubeului; creionul galben se află în penar; găina este un animal din curtea bunicii.
- $m \in A$ , mulțimea literelor care alcătuiesc cuvântul matematică conține litera  $m$ .
- $5 \in B$ , 5 este cifră.
- $52 \in \mathbb{N}$ .
- $2022 \notin C$ . Elementul 2022 nu aparține mulțimii numerelor naturale de la 0 la 100.

Mulțimile pot fi reprezentate în trei moduri

- Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler;
- Prin enumerarea elementelor mulțimii;
- Cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor sale.

*Exemplu:*

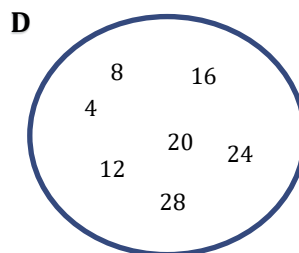
Diagrama Venn-Euler

Enumerarea elementelor

$$D = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}.$$

Folosind proprietatea caracteristică

$$D = \{x = 4k | k \leq 7, k \in \mathbb{N}^*\}.$$



**Definiție:** Numim **cardinalul** unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Notăm cardinalul mulțimii  $A$  cu  $\text{card } A$  sau  $|A|$ .

*Exemplu:*

În exemplul anterior cardinalul mulțimii  $D$  este  $\text{card } D = 7$ .

**Definiție:** Mulțimile care nu sunt finite se numesc infinite.

**Definiție:** Mulțimea fără nici un element poartă numele de **mulțimea vidă** și se notează cu  $\emptyset$ . Mulțimea vidă are cardinalul nul. ( $\text{card } \emptyset = 0$ )

**Definiție:** Două mulțimi se numesc **echipotente** dacă au cardinalele egale. Se notează  $A \sim B$ .

*Exemplu:*

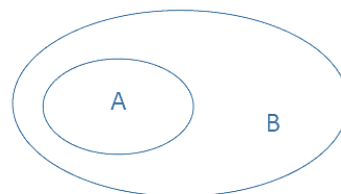
Mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 5\}$  și  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  sunt echipotente, deoarece a cardinalul egal cu 5.

## 1.2. Relații între mulțimi

Există două tipuri de relații între mulțimi: egalitatea și incluziunea.

**Definiție:** Spunem că mulțimea  $A$  este **inclusă** în mulțimea  $B$  și notăm  $A \subseteq B$ , dacă orice element din mulțimea  $A$  este element al mulțimii  $B$ . În acest caz, spunem că  $A$  este submulțime a lui  $B$ .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in B.$$



*Exemplu:*

Mulțimea  $A = \{2, 4, 6\}$  este inclusă în mulțimea  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Scriem  $A \subseteq B$  sau

$$\{2, 4, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

*Proprietățile relației de incluziune*

1. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi  $\emptyset \subseteq A, \forall A$ .
2. Reflexivitate: orice mulțime este submulțime a sa  $A \subseteq A, \forall A$ .
3. Tranzitivitate: dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq C$ , atunci  $A \subseteq C$ .

**Definiție:** Spunem că mulțimea  $A$  este **egală** cu mulțimea  $B$  dacă și numai dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq A$ .

*Altfel spus, două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elementele.*

*Exemplu:*

Mulțimile  $A = \{x = 3k + 1 | k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$  și  $B = \{y = 3p - 2 | p \in \mathbb{N}^*, p \leq 5\}$  sunt egale, deoarece  $A = \{1, 4, 7, 10, 13\}$  și  $B = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ .

*Proprietățile relației de egalitate:*

1. Reflexivitate:  $A = A, \forall A$ .
2. Simetrie: dacă  $A = B$ , atunci  $B = A$ .
3. Tranzitivitate: dacă  $A = B$  și  $B = C$ , atunci  $A = C$ .

**Definiție:** Mulțimea submulțimilor lui  $A$  se numește **mulțimea părților lui  $A$**  și se notează cu  $\mathcal{P}(A)$ .

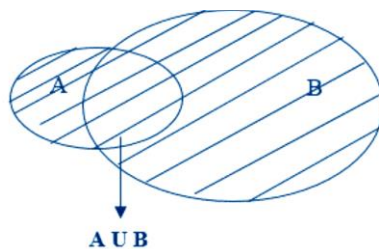
*Exemplu:*

Dacă  $A = 0, 1, 2$ , atunci  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ .

### 1.3. Operații cu mulțimi

**Definiție:** **Reuniunea** a două mulțimi este mulțimea formată din toate elementele celor două mulțimi scrise o singură dată. Notăm reuniunea dintre mulțimile  $A$  și  $B$  cu  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

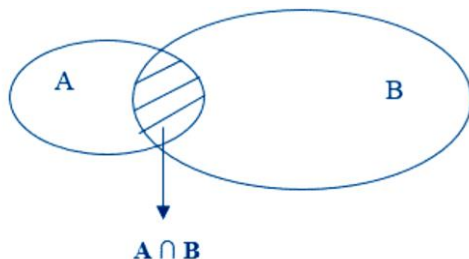


*Exemplu:*

Dacă  $A = \{1,2,4,6,7\}$  și  $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$ , atunci  $A \cup B = \{0,1,2,4,6,7,8,9,10\}$ .

**Definiție: Intersecția** a două mulțimi este mulțimea elementelor comune. Notăm intersecția dintre mulțimile  $A$  și  $B$  cu  $A \cap B$ .

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$



*Exemplu:*

Dacă  $A = \{1,2,4,6,7\}$  și  $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$ , atunci  $A \cap B = \{1,4,6\}$ .

**Definiție:** Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc mulțimi **disjuncte**.

*Exemplu:*

Mulțimile  $A = \{1,5,7\}$  și  $B = \{0,4,8\}$  sunt disjuncte.

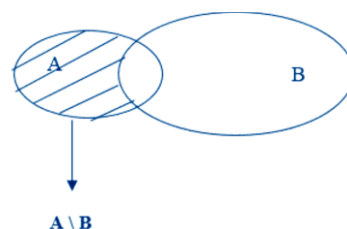
**Propoziția 1.1:** Fie mulțimile  $A$ ,  $B$  și  $C$ . Atunci au loc relațiile:

- i.  $A \subseteq A \cup B$ ;  $B \subseteq A \cup B$ ;
- ii.  $A \cap B \subseteq A$ ;  $A \cap B \subseteq B$ ;
- iii.  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cup \emptyset = A$ ;
- iv. Reflexivitatea:  $A \cap A = A$ ;  $A \cup A = A$ ;
- v. Comutativitatea:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ ;
- vi. Asociativitatea:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
- vii. Distributivitatea
  - a. Reuniunii față de intersecție:
 
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); (A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
  - b. Intersecției față de reuniune:
 
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

**Definiție:** Mulțimea tuturor submulțimilor disjuncte ale unei mulțimi  $A$  se numește **partiție** a mulțimii  $A$ .

**Definiție: Diferența** a două mulțimi este mulțimea formată din elementele care se află în prima mulțime, dar nu se află în a doua. Notăm diferența dintre mulțimile  $A$  și  $B$  cu  $A - B$  sau  $A \setminus B$ .

$$A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$



**Exemplu:**

Dacă  $A = \{1,2,4,6,7\}$  și  $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$ , atunci  $A - B = \{2,7\}$  și  $B - A = \{0,8,9,10\}$ .

Observăm că  $A - B \neq B - A$ .

**Propoziția 1.2:** Fie mulțimile  $A, B$  și  $C$ . Atunci au loc relațiile:

- i.  $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ ;
- ii.  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ;  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ;
- iii.  $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ ;  $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .

**Definiție:** Pentru  $A \subseteq E$ , numim **complementara** mulțimii  $A$  mulțimea  $E - A$ , notată cu  $C_E A$ .

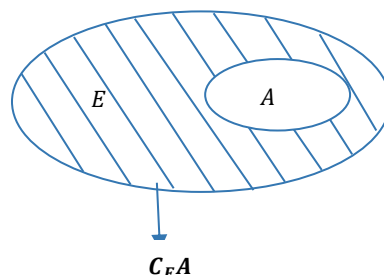
$$C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\} = E - A.$$

**Propoziția 1.3:** Fie  $A, B \subseteq E$ . Atunci au loc relațiile:

- i.  $A \cup C_E A = E$ ;
- ii.  $A \cap C_E A = \emptyset$ ;
- iii. **Relațiile lui De Morgan**

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B);$$

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B);$$



**Definiție:** Pentru mulțimile  $A$  și  $B$ , definim **diferența simetrică**

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$